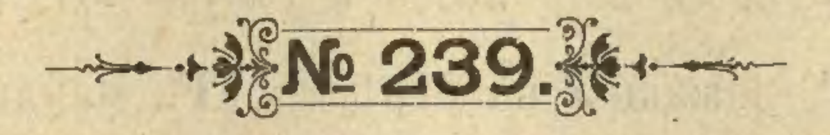
XX Сем. 10-го Іюня 1896 г. № 11.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ
и
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.




**Содержаніе:** Элементарная теорія эллипса. (Отвѣтъ на тему, предложенную въ „Вѣстникѣ").—Замѣтка о задачѣ Паппуса. (Окончаніе). *П. Свѣшникова.* — Новая геометрія треугольника. (Продолженіе). *Д. Е.*—Генри Резаль. *В. Г.* — Научная хроника: Перемѣщеніе магнитныхъ полюсовъ. Дѣйствіе *x*-лучей на волоса. Новое приложеніе *x*-лучей. Растеніе-компасъ. — Опыты и приборы: Демонстрированіе теплопрозрачности различныхъ тѣлъ.—Изобрѣтенія и открытія: Флуороскопъ Эдисона. Превращеніе силы тяготѣнія въ электрическую энергію.—Разныя извѣстія.—Задачи №№ 355—360. — Рѣшенія задачъ 3-ей серіи №№ 287, 288 и 289.—Обзоръ научныхъ журналовъ: Bulletin de la Société Astronomique de France, № 6. *К. Смолича.* — Присланныя въ редакцію книги и брошюры.—Поправка.—Объявленія.

# ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРІЯ ЭЛЛИПСА.

(Отвѣтъ на тему, предложенную профессоромъ Ермаковымъ въ № 110 „Вѣстника").

Редакціей „Вѣстника Оп. Физики" были получены три отвѣта на тему, предложенную проф. В. Ермаковымъ въ № 110 „Вѣстника". Отвѣты эти принадлежатъ 1) г. *М. Абрамову* (Житоміръ); 2) г. *И. Бѣлянкину* (Кіевъ) и 3) г. *П. Свѣшникову* (Троицкъ). Хотя всѣ три статьи являются удовлетворительными отвѣтами на предложенную тему, редакція не нашла возможнымъ печатать ихъ въ томъ видѣ, въ какомъ они были получены. Предлагаемая въ настоящее время статья составлена главнымъ образомъ по статьѣ г. Свѣшникова, представляющей наиболѣе полную и обстоятельную разработку предложенной темы.

## I. Форма эллипса.

1. *Эллипсомъ* называется геометрическое мѣсто точекъ плоскости, сумма разстояній которыхъ отъ двухъ данныхъ точекъ, лежащихъ въ той же плоскости, есть величина постоянная.

Данныя точки называются *фокусами.* Условимся обозначать ихъ черезъ F и F'. Отрѣзки FM и F'M, соединяющіе какую-нибудь точку

M эллипса съ фокусами, назовемъ *радіусами векторами* этой точки. По опредѣленію эллипса сумма радіусовъ векторовъ $FM + F'M$ всякой его точки M есть величина постоянная. Эту постоянную условимся обозначать черезъ $2a$, а разстояніе между фокусами черезъ $2c$.

2. Вообще можно сдѣлать лишь три предположенія относительно $a$ и $c$ либо $a < c$, либо $a = c$, либо $a > c$.

Если $a < c$, то геометрическаго мѣста, обладающаго свойствомъ эллипса, вовсе не существуетъ. Дѣйствительно, для точки M, лежащей на плоскости внѣ прямой $FF'$, имѣемъ изъ треуг. $MFF'$

$$MF + MF' > FF', \text{ или } MF + MF' > 2c \qquad (1);$$

но, если $a < c$, то $2c > 2a$, а потому и $MF + MF' > 2a$.

Для точки $M'$, лежащей на отрѣзкѣ $FF'$, найдемъ

$$M'F + M'F' = FF' = 2c \qquad (2),$$

а потому $M'F + M'F' > 2a$. Для точки $M''$, взятой на продолженіи отрѣзка $FF'$, одинъ изъ радіусовъ векторовъ ея больше $FF'$, а потому

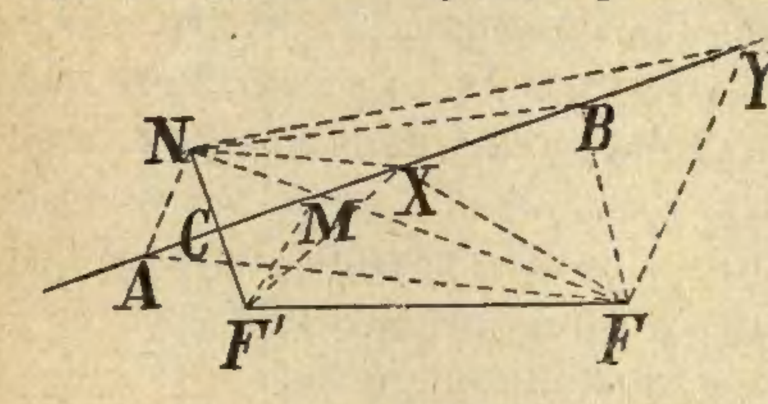
$$M''F + M''F' > FF', \text{ или } M''F + M''F' > 2c \qquad (3);$$

но такъ какъ $2c > 2a$, то опять $M''F + M''F' > 2a$, Итакъ, если $a < c$, то никакая точка плоскости не удовлетворяетъ опредѣленію эллипса.

Если $a = c$, то всѣ точки отрѣзка $FF'$ и только эти точки суть точки эллипса, что вытекаетъ изъ примѣненія къ этому случаю уравненія (2) и неравенствъ (1) и (3).

Для удобства изслѣдованія случая, когда $a > c$, условимся безконечный отрѣзокъ прямой, имѣющій начало въ точкѣ A, называть лучомъ, исходящимъ изъ точки A, причемъ будемъ обозначать лучъ этотъ черезъ AB, гдѣ B — какая-нибудь точка луча.

Если $a > c$, то на всякомъ лучѣ, проходящемъ черезъ одинъ изъ фокусовъ F, можно найти одну и только одну точку эллипса. Разсмотримъ раньше лучъ, проходящій лишь черезъ одинъ фокусъ F. Отложимъ на этомъ лучѣ длину $FN = 2a$ и проведемъ прямую $F'N$ (черт. 56). Изъ средины C прямой $F'N$ возставимъ къ ней перпендикуляръ, который непремѣнно встрѣтитъ прямую FN въ нѣкоторой точкѣ M. Дѣйствительно, уголъ $F'NF$ не есть наибольшій изъ угловъ треугольника $F'NF$, ибо, по предположенію $2c < 2a$, или $FF' < FN$; значитъ уголъ $F'NF$ острый, а потому прямыя CM и NF, изъ которыхъ одна перпендикулярна къ сѣкущей CN, а другая наклонна, встрѣчаются. При этомъ точка M не можетъ лежать на лучѣ FN на продолженіи отрѣзка FN, ибо прямая CM можетъ встрѣтить прямую NF лишь со стороны остраго угла CNM. Точка M не можетъ лежать и на лучѣ NF внѣ отрѣзка NF, ибо тогда мы имѣли бы:



Фиг. 56.

$$MN - MF = FN = 2a,$$

или, такъ какъ наклонныя MN и MF′ были бы равны, какъ равно удаленныя отъ основанія перпендикуляра:

$$MF' - MF = 2a;$$

но тогда разность двухъ сторонъ MF′ и MF треугольника MFF′ была бы болѣе $2c$, или, что все равно, болѣе F′F, т. е. болѣе третьей стороны треугольника. Итакъ точка M лежитъ на отрѣзкѣ FN, а потому $MN + MF = FN = 2a$; замѣняя въ этомъ равенствѣ прямую MN равной ей прямой MF′, получимъ

$$MF' + MF = 2a,$$

т. е точка M принадлежитъ эллипсу. Никакая же другая точка луча FN, кромѣ точки M, не принадлежитъ эллипсу.

Дѣйствительно, для всякой точки $m$, взятой на отрѣзкѣ FM, имѣемъ изъ треуг. $mF'M$:

$$mF' < MF' + Mm.$$

Прибавивъ къ обѣимъ частямъ этого неравенства по $mF$, получимъ

$$mF' + mF < MF' + MF, \text{ или } mF' + mF < 2a,$$

а потому $m$ не есть точка эллипса. Подобнымъ же образомъ докажемъ, что никакая точка луча FN, лежащая внѣ отрѣзка FM, не принадлежитъ эллипсу.

Разсмотримъ теперь лучъ F′F, проходящій черезъ оба фокуса. Никакая точка этого луча, лежащая на отрѣзкѣ F′F, не можетъ быть точкой эллипса, ибо сумма ея радіусовъ векторовъ равна $2c$.

Для того же, чтобы нѣкоторая точка A этого луча, лежащая на продолженіи отрѣзка F′F, была точкой эллипса, для этого необходимо и достаточно, чтобы радіусы векторы ея удовлетворяли уравненіямъ

$$AF' - AF = 2c;\ AF + AF' = 2a.$$

Уравненія эти имѣютъ опредѣленныя положительныя рѣшенія

$$AF' = a + c;\ AF = a - c,$$

откуда и видимъ, что на лучѣ FF′ есть точка эллипса, и притомъ лишь одна. Точно также на лучѣ F′A′, прямо противоположномъ лучу FF′, найдемъ лишь одну точку эллипса A′, радіусы векторы которой суть $A'F = a + c$ и $A'F' = a - c$.

Итакъ, если $a > c$, то на всякомъ лучѣ, проведенномъ черезъ фокусъ эллипса, лежитъ одна и только одна точка эллипса. Во всемъ дальнѣйшемъ изложеніи разсматривается исключительно случай, когда $a > c$ *).

3. Величины $a + c$ и $a - c$ представляютъ собою наибольшій и наименьшій предѣлы, которыхъ можетъ достигать радіусъ векторъ точки эллипса.

---

*) Мы предположимъ, кромѣ того, что $c > 0$, т. е. данныя точки не совпадаютъ. Если же онѣ совпадаютъ, эллипсъ обращается въ кругъ радіуса $a$.

Дѣйствительно, изъ предыдущаго параграфа видно, что на прямой FF' лежатъ лишь двѣ точки эллипса, — одна на лучѣ FF', а другая на лучѣ F'F, — радіусы векторы которыхъ суть $a+c$ и $a-c$. Для этихъ двухъ точекъ разность ихъ радіусовъ векторовъ равна $(a+c)-(a-c)$, или $2c$. Всѣ же остальныя точки эллипса лежатъ внѣ прямой FF', а потому для нихъ разность радіусовъ векторовъ меньше, чѣмъ $2c$, ибо разность двухъ сторонъ треугольника меньше третьей стороны. Итакъ, разумѣя подъ M вообще какую-нибудь точку эллипса, можно написать $|MF - MF'| \leqslant 2c$. Если же мы допустимъ, что одинъ изъ радіусовъ векторовъ нѣкоторой точки эллипса болѣе $a+c$, то другой радіусъ векторъ долженъ быть менѣе $a-c$, ибо сумма радіусовъ векторовъ равна $2a$; но тогда разность ихъ была бы болѣе $2c$, что невозможно, ибо, какъ выше указано, разность эта меньше или равна $2c$. Точно такъ же докажемъ, что радіусъ векторъ точки эллипса не можетъ быть менѣе $a-c$.

Такъ какъ длина радіусовъ векторовъ всѣхъ точекъ эллипса заключена между $a+c$ и $a-c$, то всѣ точки эллипса находятся на конечныхъ разстояніяхъ отъ фокусовъ.

4. Кривую линію, двигаясь по которой точка проходитъ всѣ точки кривой и вновь возвращается въ точку исхода, назовемъ замкнутой кривой.

Эллипсъ есть замкнутая кривая.

Дѣйствительно, вообразимъ себѣ, что нѣкоторый лучъ FA, вращаясь вокругъ точки F, совершаетъ полный оборотъ. Пусть при этомъ нѣкоторая точка M перемѣщается по лучу FA, занимая въ каждомъ его положеніи мѣсто единственной лежащей на немъ точки эллипса. По совершеніи лучомъ FA полнаго оборота точка M возвратится въ точку исхода, — такъ какъ на лучѣ FA можетъ лежать (см. 2) лишь одна точка эллипса,—совершивъ путь по нѣкоторой кривой, всѣ точки которой принадлежатъ эллипсу. Притомъ точками этой кривой исчерпываются всѣ точки эллипса.

Дѣйствительно, пусть X будетъ точка эллипса, не лежащая на вышеупомянутой кривой.

Проведемъ лучъ FX, и назовемъ черезъ X' единственную точку эллипса, лежащую на этомъ лучѣ. Точка X' не можетъ совпасть съ точкой X, ибо X' лежитъ на вышеупомянутой кривой, а X, по сдѣланному предположенію,—не лежитъ. Значитъ на лучѣ FX лежало бы двѣ точки эллипса, что невозможно *).

---

*) Чтобы наглядно воспроизвести фигуру эллипса, поступаютъ такъ: обертываютъ два штифта, укрѣпленныхъ неподвижно въ двухъ точкахъ плоскости чертежа F и F', замкнутой гибкой, но нерастяжимой нитью, длину которой обозначимъ черезъ $l$; затѣмъ, натягивая нить остріемъ карандаша, сообщаютъ ему движеніе въ одномъ направленіи, пока остріе карандаша не вернется въ точку исхода.

Начерченная этимъ способомъ кривая есть эллипсъ, такъ какъ для всякой точки ея имѣемъ

$$MF + MF' + FF' = l,$$

откуда

$$MF + MF' = l - FF',$$

т. е. сумма радіусовъ векторовъ есть величина постоянная.

## II. Относительное положеніе эллипса и точки.

5. Проведемъ лучъ FA, проходящій чрезъ одинъ изъ фокусовъ F и какую-нибудь точку A, лежащую въ плоскости эллипса. Назовемъ черезъ M единственную точку эллипса, лежащую на этомъ лучѣ. Здѣсь могутъ быть три различныхъ случая.

1) Точка A совпадаетъ съ точкой M эллипса.

2) Точка A лежитъ на отрѣзкѣ FM, не совпадая съ однимъ изъ его концовъ,—точкою M.

3) Точка A лежитъ внѣ отрѣзка FM.

Въ первомъ случаѣ точка A есть точка эллипса; во второмъ случаѣ назовемъ точку A *внутреннею* относительно эллипса или лежащею внутри эллипса точкой; въ третьемъ случаѣ назовемъ точку A *внѣшней* относительно эллипса или же лежащей внѣ эллипса точкой.

Такъ какъ всякую точку можно соединить съ фокусомъ и такъ какъ одинъ изъ трехъ указанныхъ выше случаевъ непремѣнно имѣетъ мѣсто, то всякая точка плоскости окажется лежащей либо на эллипсѣ, либо внутри, либо внѣ его; такимъ образомъ, точки плоскости эллипса распадутся на три класса: классъ точекъ эллипса, классъ точекъ, лежащихъ внутри его, классъ точекъ, лежащихъ внѣ его.

Оба фокуса, всѣ остальныя точки отрѣзка FF′ и даже всѣ точки, лежащія внутри отрѣзка AA′, соединяющаго двѣ точки эллипса A и A′, лежащія на прямой FF′, находятся внутри эллипса, ибо, какъ это видно изъ § 2, точки F и F′ лежатъ обѣ внутри отрѣзка AA′.

6. **Теорема.** Сумма разстояній отъ фокусовъ точки, лежащей внутри эллипса, меньше $2a$; сумма же разстояній отъ фокусовъ точки, лежащей внѣ эллипса, болѣе $2a$.

Если внутренняя или внѣшняя относительно эллипса точка окажется на прямой FF′ и притомъ на продолженіи отрѣзка FF′, то радіусы векторы ея будутъ либо оба менѣе (въ случаѣ внутренней точки), либо оба болѣе (въ случаѣ внѣшней точки) соотвѣтствующихъ радіусовъ векторовъ одной изъ точекъ эллипса A или A′, лежащихъ на прямой FF′, откуда и слѣдуетъ справедливость теоремы въ этихъ частныхъ случаяхъ. Точно такъ же, если точка лежитъ на отрѣзкѣ FF′, а слѣдовательно внутри эллипса (5), теорема справедлива, ибо сумма разстояній отъ фокусовъ такой точки равна $2c$,—величинѣ, меньшей $2a$.

Разсмотримъ теперь точку $m$, лежащую внутри эллипса, притомъ внѣ прямой FF′. Пусть M—точка эллипса, лежащая на лучѣ F$m$.

Такъ какъ точка $m$ лежитъ внутри эллипса то, согласно съ опредѣленіемъ внутренней точки, она лежитъ на отрѣзкѣ FM, а потому

$$mF + mM = FM \qquad (4).$$

Въ то же время изъ треугольника M$m$F′ имѣемъ

$$mF' < mM + MF'.$$

Прибавивъ къ обѣимъ частямъ этого неравенства по $m$F и принявъ во вниманіе уравненіе (4), получимъ

$$mF + mF' < MF + MF' \text{ или } mF + mF' < 2a.$$

Подобнымъ же образомъ докажемъ, что сумма разстояній отъ фокусовъ точки, лежащей внѣ эллипса и притомъ внѣ прямой FF', болѣе $2a$.

*Слѣдствіе.* Системы лучей, проведенныхъ изъ обоихъ фокусовъ, разлагаютъ точки плоскости на три класса (5) тожественнымъ образомъ.

Дѣйствительно, если бы какая-нибудь точка плоскости оказалась при соединеніи ея лучомъ съ однимъ изъ фокусовъ лежащей внутри, а при соединеніи съ другимъ фокусомъ—лежащей внѣ эллипса, то сумма разстояній этой точки отъ фокусовъ была бы въ одно время и меньше, и болѣе $2a$, что невозможно.

**Обратная теорема.** Если сумма разстояній отъ фокусовъ какой-нибудь точки, лежащей въ плоскости эллипса, меньше $2a$, то точка эта лежитъ внутри эллипса; если же эта сумма болѣе $2a$, точка лежитъ внѣ эллипса.

Теорема эта доказывается безъ труда способомъ отъ противнаго.

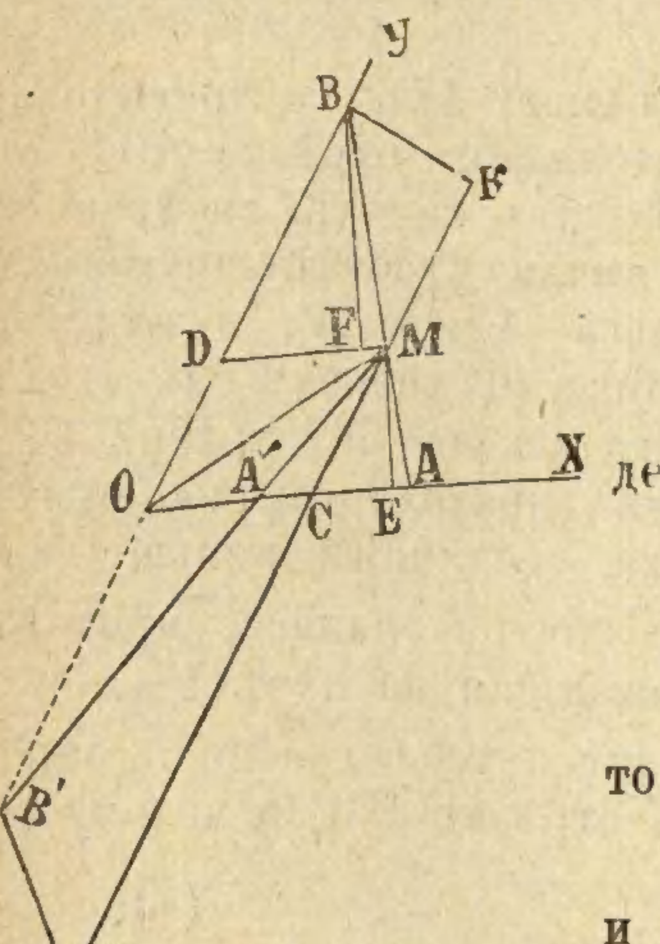
(*Продолженіе слѣдуетъ*).

# Замѣтка о задачѣ Паппуса.

(*Окончаніе* *).

Указаннымъ пріемомъ можно рѣшить еще нѣсколько задачъ, которыя подобны задачѣ Паппуса.

Обозначимъ отрѣзокъ AM черезъ $z$. Тогда мы получимъ




Фиг. 57.

$$\overline{BD} = \frac{ay}{z}, \quad \overline{BD}^2 = y^2 - a^2 + \frac{2a(b-a)y}{z}.$$

Отсюда находимъ

$$y^2z^2 - a^2(y^2 + z^2) + 2a(b-a)yz = 0.$$

Присоединяя сюда уравненіе $yz = ax$, будемъ имѣть

$$x^2 - (y^2 + z^2) + 2(b-a)x = 0.$$

Если

$$y + z = l,$$

то

$$y^2 + z^2 = l^2 - 2ax$$

и для опредѣленія $x$ мы найдемъ уравнененіе

$$x^2 + 2bx - l^2 = 0,$$

посредствомъ котораго рѣшается задача Паппуса.

*) См. № 237 „Вѣстника Оп. Физики“.

Разсмотримъ другія задачи, въ которыхъ даны разныя соотношенія между отрѣзками $y$ и $z$.

1) $$y - z = l.$$

Сначала находимъ

$$y^2 + z^2 = l^2 + 2ax.$$

Послѣ этого получаемъ уравненіе

$$x^2 + 2(b - 2a)x - l^2 = 0.$$

2) $$y^2 + z^2 = l^2.$$

Для опредѣленія $x$ имѣемъ уравненіе:

$$x^2 + 2(b - a)x - l^2 = 0.$$

3) $$\frac{1}{y} \pm \frac{1}{z} = \frac{1}{l}.$$

Сначала находимъ

$$y^2 + z^2 = \frac{a^2x^2 \mp 2l^2ax}{l^2}.$$

Затѣмъ получаемъ

$$x = \frac{2l^2(a - b \mp a)}{l^2 - a^2}.$$

Подобнымъ же способомъ можно рѣшить слѣдующую гораздо болѣе общую задачу: „Черезъ точку M внутри угла XOY провести сѣкущую AB, такъ чтобы отрѣзки AM и BM между данной точкой и сторонами даннаго угла удовлетворяли уравненію

$$\frac{1}{m.\overline{AM}} \pm \frac{1}{n.\overline{BM}} = \frac{1}{l}.“$$

Впрочемъ для рѣшенія этой задачи гораздо удобнѣе примѣнить способъ обратныхъ фигуръ.

4) $$\frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = \frac{1}{l^2}.$$

Изъ даннаго соотношенія слѣдуетъ

$$y^2 + z^2 = \frac{a^2x^2}{l^2}.$$

Послѣ этого находимъ

$$x = \frac{2(a - b)l^2}{l^2 - a^2}.$$

Положимъ теперь, что данный уголъ XOY прямой. Тогда $b = a$ и между величинами $x, y, z$ находимъ слѣдующія соотношенія:

$$yz = ax,\ x^2 = y^2 + z^2.$$

5) Пусть $y^2 - z^2 = l^2$. Изъ этого соотношенія найдемъ

$$y^2 + z^2 = \sqrt{l^4 + 4a^2x^2}\cdot$$

Для опредѣленія $x$ получимъ уравненіе

$$x^2 = \sqrt{l^4 + 4a^2x^2} \text{ или } x^4 - 4a^2x^2 - l^4 = 0.$$

6)
$$\frac{1}{y^2} - \frac{1}{z^2} = \frac{1}{l^2}.$$

Прежде всего находимъ

$$z^2 - y^2 = a^2x^2 : l^2,$$

затѣмъ

$$z^2 + y^2 = \sqrt{\frac{a^4x^4}{l^4} + 4a^2x^2},$$

наконецъ

$$x^2 = \frac{4a^2l^4}{l^4 - a^4}.$$

Положимъ теперь, что точка M не лежитъ на биссекторѣ угла XOY. Обозначая отрѣзокъ MC черезъ $c$ и сохраняя всѣ остальныя обозначенія, получимъ изъ подобія треугольниковъ BKM и MCE:

$$yz = cx.$$

7) Если $yz = l^2$, то $x = \frac{l^2}{c}\cdot$ Такимъ образомъ рѣшается задача: „черезъ точку внутри угла провести сѣкущую, такъ чтобы произведеніе ея отрѣзковъ, ограниченныхъ точкой и сторонами угла, равнялось квадрату данной прямой $l$".

*П. Свѣшниковъ* (Уральскъ).

# НОВАЯ ГЕОМЕТРІЯ
## ТРЕУГОЛЬНИКА.

*(Géométrie récente du triangle).*

*(Продолженіе*).*

### VI. Круги Тукера, Лемуана и Тейлора.

1. Теорема. *Если гомотетичные треугольники* ABC *и* abc *имѣютъ центромъ гомотетіи ихъ общую точку Лемуана* K, *то шесть точекъ пересѣченія несоотвѣтственныхъ сторонъ ихъ находятся на одной окружности.*

*) См. „Вѣстника Оп. Физики" №№ 230, 231, 232, 234 и 236.

Пусть (фиг. 58) $ab$ пересѣкаетъ AC и BC въ $\alpha'$ и $\beta$,
$bc$ „ AB и AC въ $\beta'$ и $\gamma$,
$ca$ „ BC и AB въ $\gamma'$ и $\alpha$.

Фиг. 58.

Такъ какъ $ab \parallel AB$, $bc \parallel BC$ и $ca \parallel CA$, то $A\alpha a\alpha'$, $B\beta b\beta'$, $C\gamma c\gamma'$ суть параллелограммы; поэтому симедіаны AK, BK, CK треугольника ABC дѣлятъ пополамъ отрѣзки $a\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$; слѣдовательно эти прямыя соотвѣтственно антипараллельны сторонамъ треугольника BC, AC и AB, а потому (V,6)

$$\angle A\alpha\alpha' = \angle C = \angle B\beta'\beta,\ \ \angle B\beta\beta' = \angle A = \angle C\gamma'\gamma,\ \ \angle C\gamma\gamma' = \angle B = \angle A\alpha'\alpha$$

и
$$\alpha\alpha' = \beta\beta' = \gamma\gamma'.$$

Обозначимъ чрезъ O и $o$ центры круговъ ABC и $abc$, такъ какъ точка K есть центръ гомотетіи треугольниковъ ABC и $abc$, то точки K, $o$ и O лежатъ на одной прямой. Пусть $\omega$ есть средина $Oo$; соединивъ эту точку со срединами $m$, $n$, $p$ отрѣзковъ $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ увидимъ, что $\omega m \parallel OA \parallel oa$, $\omega n \parallel OB \parallel ob$, $\omega p \parallel OC \parallel oc$; но $OA \perp \alpha\alpha'$, потому что $\alpha\alpha'$, какъ антипараллельная BC, параллельна касательной $B'C'$ въ точкѣ A къ кругу ABC; слѣдовательно $\omega m \perp \alpha\alpha'$; точно также $\omega n \perp \beta\beta'$ и $\omega p \perp \gamma\gamma'$.

Замѣтивъ, наконецъ, что

$$\frac{\omega m}{oa} = \frac{\omega n}{ob} = \frac{\omega p}{oc} = \frac{\omega K}{oK},$$

гдѣ $oa = ob = oc$, заключаемъ, что

$$\omega m = \omega n = \omega p.$$

Изъ этихъ равенствъ и равенства отрѣзковъ $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, слѣдуетъ, что точки $\alpha, \alpha'$, $\beta, \beta'$, $\gamma, \gamma'$ равно отстоятъ отъ $\omega$, т. е. что эти точки лежатъ на окружности, имѣющей центръ въ точкѣ $\omega$ *).

*) Доказанная теорема справедлива независимо отъ того, прямо или обратно гомотетичны треугольники ABC и $abc$.

2. Слѣдствія. Изъ равенства дугъ $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ слѣдуетъ, что треугольники $\alpha\beta\gamma$ и $\alpha'\beta'\gamma'$ равны между собою и подобны и одинаково расположены съ треугольникомъ ABC; центрами подобія треугольника ABC съ каждымъ изъ треугольниковъ $\alpha\beta\gamma$ и $\alpha'\beta'\gamma'$ служатъ *точки Брокара*, $\Omega$ и $\Omega'$ треугольника ABC (III,7). Обратно:

Если въ треугольникъ ABC вписанъ подобный ему треугольникъ $\alpha\beta\gamma$, такъ что центромъ подобія ихъ служитъ *точка Брокара* $\Omega$ треугольника ABC, то окружность $\alpha\beta\gamma$ пересѣкаетъ стороны треугольника ABC еще въ такихъ точкахъ $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$, что треугольникъ $\alpha'\beta'\gamma'$ равенъ треугольнику $\alpha\beta\gamma$ и подобенъ треугольнику ABC, имѣя съ нимъ центромъ подобія его вторую *точку Брокара* $\Omega'$.

Прямыя, соединяющія вершины треугольниковъ $\alpha\beta\gamma$ и $\alpha'\beta'\gamma'$, антипараллельны или параллельны сторонамъ треугольника ABC, смотря по тому, соединяютъ-ли онѣ соотвѣтственныя или несоотвѣтственныя вершины треугольниковъ.

3. Треугольникъ $a'b'c'$, составленный прямыми $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, гомотетиченъ съ треугольникомъ $A'B'C'$, составленнымъ касательными въ A, B, C къ кругу ABC. Центромъ гомотетіи этихъ треугольниковъ служитъ *точка Лемуана* K треугольника ABC.

Шесть точекъ $\alpha$, $\alpha'$, $\beta$, $\beta'$, $\gamma$, $\gamma'$ пересѣченія сторонъ треугольника ABC съ сторонами треугольника $a'b'c'$, гомотетичнаго съ треугольникомъ $A'B'C'$ относительно точки K, лежатъ на одной окружности.

4. Окружность Тукера (*Tucker*). Окружность, проходящая чрезъ шесть точекъ пересѣченія сторонъ гомотетичныхъ треугольниковъ ABC и $abc$ (фиг. 58), имѣющихъ центромъ гомотетіи общую ихъ *точку Лемуана* K, называется (по предложенію Neuberg'a) *окружностью Тукера*.

Изъ предыдущаго слѣдуетъ, что *центръ круга Тукера находится на прямой, соединяющей точку* K *съ центромъ круга, описаннаго около треугольника* ABC, *и дѣлитъ пополамъ разстояніе между центрами круговъ* ABC *и* abc.

Если O и $\omega$ суть центры круга ABC и круга Тукера, R и $R_\omega$ — ихъ радіусы, $\Omega$ и $\Omega'$ — *точки Брокара* треугольника ABC, то

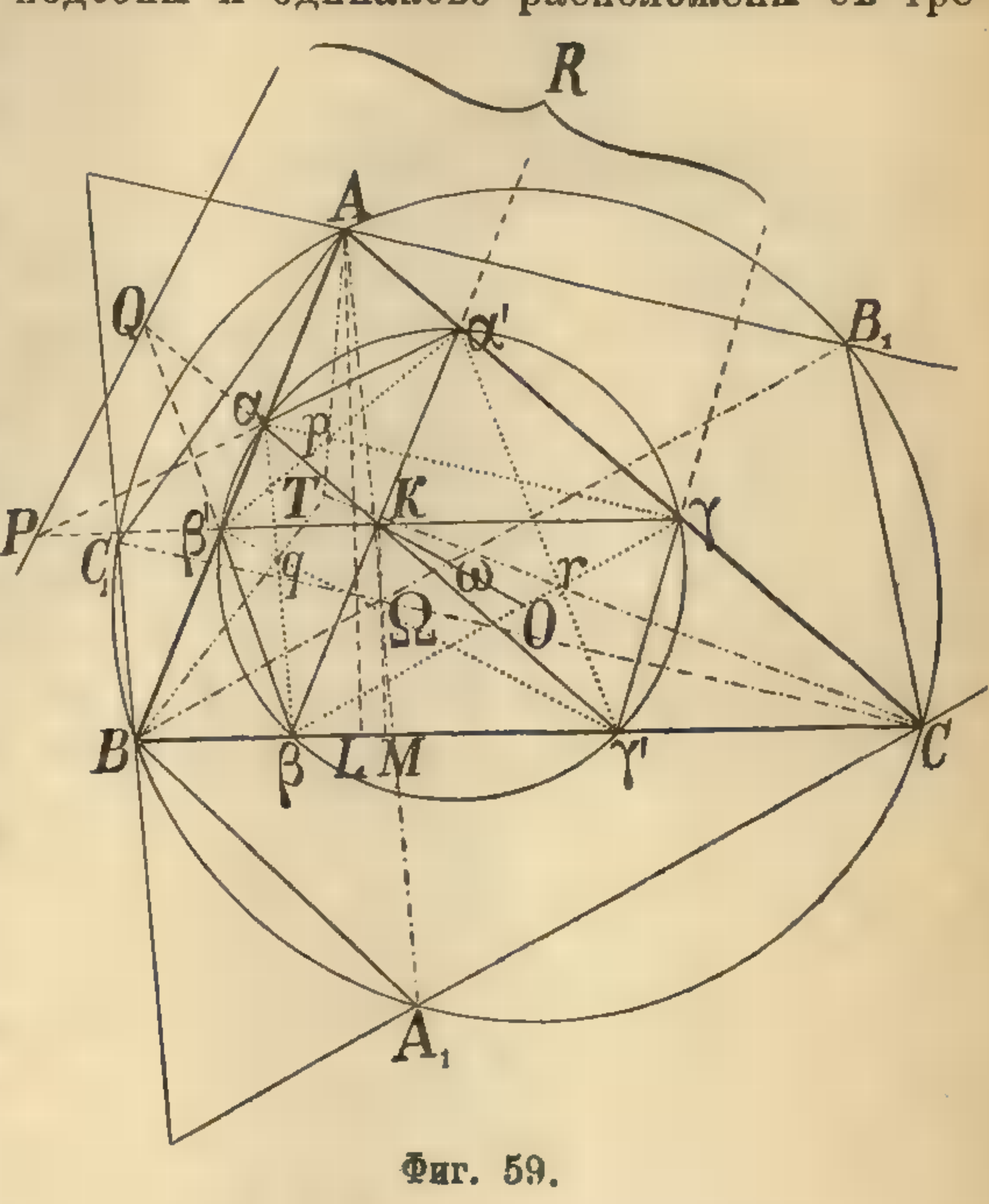
$$R_\omega : R = \omega\Omega : O\Omega = \omega\Omega' : O\Omega'.$$

5. Предыдущая теорема (1) справедлива и въ томъ предѣльномъ случаѣ, когда треугольникъ $abc$ обращается въ точку K, т. е. когда прямыя $\alpha'\beta$, $\beta'\gamma$, $\gamma'\alpha$ проходятъ чрезъ K. Такимъ образомъ получаемъ теорему (фиг. 59).

Теорема. *Шесть точекъ пересѣченія сторонъ треугольника съ прямыми, параллельными его сторонамъ и проходящими чрезъ его точку Лемуана, находятся на одной окружности.*

Такъ какъ въ разсматриваемомъ случаѣ треугольникъ $abc$ обращается въ точку K, то центръ O круга $abc$ также совпадаетъ съ этой точкой; поэтому центръ $\omega$ круга $\alpha\alpha'\gamma\gamma'\beta\beta'$ дѣлитъ пополамъ разстояніе между точкой Лемуана K треугольника и центромъ O описаннаго около него круга.

6. **Слѣдствія.** Какъ и въ общемъ случаѣ, треугольники $\alpha\beta\gamma$ и $\alpha'\beta'\gamma'$ равны между собою и подобны и одинаково расположены съ треугольникомъ ABC; центрами подобія ихъ служатъ *точки Брокара* $\Omega$ и $\Omega'$ треугольника ABC. Кромѣ того, въ разсматриваемомъ случаѣ стороны треугольниковъ $\alpha\beta\gamma$ и $\alpha'\beta'\gamma'$ съ соотвѣтственными сторонами треугольника ABC составляютъ *уголъ Брокара* $\omega$ треугольника ABC; такъ что напр.




Фиг. 59.

$$\angle\,\beta\alpha B = \angle\,\Omega AB = \angle\,\omega;$$

поэтому отношеніе подобія треугольниковъ $\alpha\beta\gamma$ и $\alpha'\beta'\gamma'$ съ треугольникомъ ABC равно

$$\frac{\alpha\Omega}{A\Omega} = \frac{\sin\Omega A\alpha}{\sin\Omega\alpha A} = \frac{\sin\omega}{\sin 2\omega} = \frac{1}{2\cos\omega},$$

ибо

$$\angle\,\Omega AB = \angle\,\Omega\alpha\beta = \angle\,A\Omega\alpha.$$

Отсюда слѣдуетъ также, что точка $\alpha$ есть пересѣченіе стороны AB съ перпендикуляромъ, возставленнымъ въ срединѣ $A\Omega$.

Такъ какъ $\alpha\alpha' = \beta\beta' = \gamma\gamma'$, то углы $\angle\,K\alpha\gamma$, $\angle\,K\gamma\beta$ и $\angle\,K\beta\alpha$ равны; поэтому точка K служитъ *точкой Брокара* для треугольника $\alpha\beta\gamma$ (III,8); та же точка служитъ второй точкой Брокара для треугольника $\alpha'\beta'\gamma'$.

7. **Параллели Лемуана.** Прямыя $\alpha\gamma'$, $\beta\alpha'$ и $\gamma\beta'$, параллельныя сторонамъ треугольника ABC и проходящія чрезъ его точку Лемуана K, наз. *параллелями Лемуана* для треугольника ABC. (фиг. 59).

Основное свойство параллелей Лемуана состоитъ въ томъ, что точки пересѣченія ихъ съ сторонами треугольника лежатъ на одной окружности (5).

Отрѣзки, образуемые параллелями Лемуана на сторонахъ треугольника, удовлетворяютъ пропорціямъ:

$$A\alpha : \alpha\beta' : \beta' B = b^2 : c^2 : a^2,$$

$$B\beta : \beta\gamma' : \gamma' C = c^2 : a^2 : b^2,$$

$$C\gamma : \gamma\alpha' : \alpha' A = a^2 : b^2 : c^2.$$

8. **Шестиугольникъ Лемуана.** Шестиугольникъ $\alpha\alpha'\gamma\gamma'\beta\beta'$, вершины котораго суть пересѣченія сторонъ треугольника ABC съ параллелями Лемуана, наз. *шестиугольникомъ Лемуана* для треугольника ABC.

Изъ предыдущаго слѣдуетъ, что шестиугольникъ Лемуана вписывается въ окружность.

Стороны шестиугольника Лемуана ($\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$), антипараллельныя сторонамъ треугольника (ABC), равны между собою.

Если точку Лемуана K треугольника ABC соединить съ вершинами шестиугольника Лемуана, то шестиугольникъ раздѣлится на треугольники, подобные треугольнику ABC.

Если прямыя, соединяющія вершины треугольника ABC съ его *точкой Брокара* $\Omega$, пересѣкаютъ окружность ABC въ $A_1$, $B_1$, $C_1$, то шестиугольникъ $AB_1CA_1BC_1$ есть шестиугольникъ Лемуана для треугольника, составленнаго прямыми $AB_1$, $CA_1$ и $BC_1$ (фиг. 59).

9. Теорема. *Стороны шестиугольника Лемуана, лежащія на сторонахъ треугольника, пропорціональны кубамъ этихъ сторонъ.*

Пусть AL и KM суть перпендикуляры изъ A и K на сторону BC треугольника ABC (фиг. 59). Обозначивъ чрезъ $a$, $b$, $c$ и S стороны и площадь этого треугольника, изъ подобія треугольниковъ BAC и $\beta K\gamma'$ получимъ

$$\frac{\beta\gamma'}{KM}=\frac{BC}{AL}=\frac{a^2}{a.AL}=\frac{a^2}{2S}.$$

Но (V,18).

$$\frac{KM}{a}=\frac{2S}{a^2+b^2+c^2};$$

слѣдовательно

$$\beta\gamma'=\frac{a^3}{a^2+b^2+c^2};$$

точно также

$$\gamma\alpha'=\frac{b^3}{a^2+b^2+c^2} \text{ и } \alpha\beta'=\frac{c^3}{a^2+b^2+c^2};$$

отсюда

$$\beta\gamma':\gamma\alpha':\alpha\beta'=a^3:b^3:c^3.$$

10. Окружность Лемуана. Окружность, проходящая чрезъ точки пересѣченія сторонъ треугольника съ параллелями Лемуана, наз. *окружностью Лемуана.*

По предыдущей теоремѣ, отрѣзки сторонъ треугольника, заключающіеся въ кругѣ Лемуана, пропорціональны кубамъ этихъ сторонъ; вслѣдствіе этого свойства кругъ Лемуана наз. также *кругомъ тройного отношенія* (*The Triplicate Ratio Circle*).

Изъ теоремы (5) слѣдуетъ, что кругъ Лемуана принадлежитъ системѣ круговъ Тукера (4) и что *центръ круга Лемуана есть средина прямой, соединяющей точку Лемуана треугольника съ центромъ описаннаго около него круга* (фиг. 59).

Обозначивъ чрезъ $R_\omega$ и R радіусы круга Лемуана и круга, описаннаго около треугольника (ABC), а чрезъ $\omega$ — уголъ Брокара этого треугольника, получимъ (6):

$$R_\omega=\frac{R}{2\cos\omega}.$$

11. Теорема. *Радикальная ось круга Лемуана и круга, описаннаго около треугольника, есть прямая Паскаля для шестиугольника Лемуана*).*

Пусть X есть пересѣченіе противоположныхъ сторонъ $\alpha\alpha'$ и $\beta\gamma'$ (или BC) шестиугольника Лемуана (фиг. 59). Такъ какъ $\alpha\alpha'$ антипараллельна BC (1), то точки $\alpha$, $\alpha'$, B и C лежатъ на одной окружности (V, 6); радикальная ось этой окружности и окружности Лемуана есть прямая $\alpha\alpha'$ (IV, 3), проходящая, по условію, чрезъ X. Радикальная ось круговъ ABC и $\alpha\alpha'$CB есть прямая BC, тоже проходящая чрезъ X; слѣдовательно, радикальная ось круга Лемуана и круга ABC проходитъ чрезъ точку X (IV. 4), т. е. чрезъ пересѣченіе двухъ противоположныхъ сторонъ шестиугольника Лемуана. То же справедливо и для точекъ пересѣченія другихъ паръ противоположныхъ сторонъ этого шестиугольника. Слѣдовательно, радикальная ось круга Лемуана и круга ABC совпадаетъ съ прямой Паскаля шестиугольника Лемуана.

12. Теорема. *Поляра точки Лемуана относительно круга Лемуана есть прямая Паскаля для шестиугольника Лемуана,*

Четыреугольникъ $\alpha\alpha'\gamma'\beta$, вписанный въ кругъ Лемуана (фиг. 59) сдѣлаемъ полнымъ четыреугольникомъ (I, 8); обозначивъ чрезъ X пересѣченіе $\alpha\alpha'$ съ BC, замѣтимъ, что полярою точки K относительно круга Лемуана будетъ третья діагональ четыреугольника $\alpha\alpha'\gamma'\beta$, проходящая чрезъ X (III, 13). То же справедливо и для другихъ точекъ пересѣченія противоположныхъ сторонъ шестиугольника Лемуана. Слѣдовательно, поляра точки K относительно круга Лемуана совпадаетъ съ прямой Паскаля шестиугольника Лемуана.

13. Теорема. *Если хорды круга Лемуана $\alpha\gamma$ и $\alpha'\beta'$, $\alpha\beta$ и $\beta'\gamma'$, $\beta\gamma$ и $\alpha'\gamma'$ пересѣкаются въ точкахъ* p, q, r, *то треугольники* ABC *и* pqr *перспективны.*

Пусть T есть пересѣченіе прямыхъ A$p$ и B$q$ (фиг. 59). Обозначая вообще перпендикуляръ изъ точки K на прямую LM чрезъ (K,LM), изъ подобія треугольниковъ $p\alpha\beta'$ и $p\alpha'\gamma$, получимъ (9):

$$\frac{(\mathrm{T,AB})}{(\mathrm{T,AC})}=\frac{(p,\mathrm{AB})}{(p,\mathrm{AC})}=\frac{\alpha\beta'}{\alpha'\gamma}=\frac{c^3}{b^3};$$

изъ подобія-же треугольниковъ $q\alpha\beta'$ и $q\gamma'\beta$ точно такъ же находимъ, что

$$\frac{(\mathrm{T,BC})}{(\mathrm{T,AB})}=\frac{a^3}{c^3};$$

слѣдовательно

$$\frac{(\mathrm{T,BC})}{(\mathrm{T,AC})}=\frac{a^3}{b^3},$$

т. е. C$r$ проходитъ чрезъ точку T.

Изъ самаго доказательства видно, что разстоянія точки T отъ сторонъ треугольника ABC пропорціональны кубамъ этихъ сторонъ.



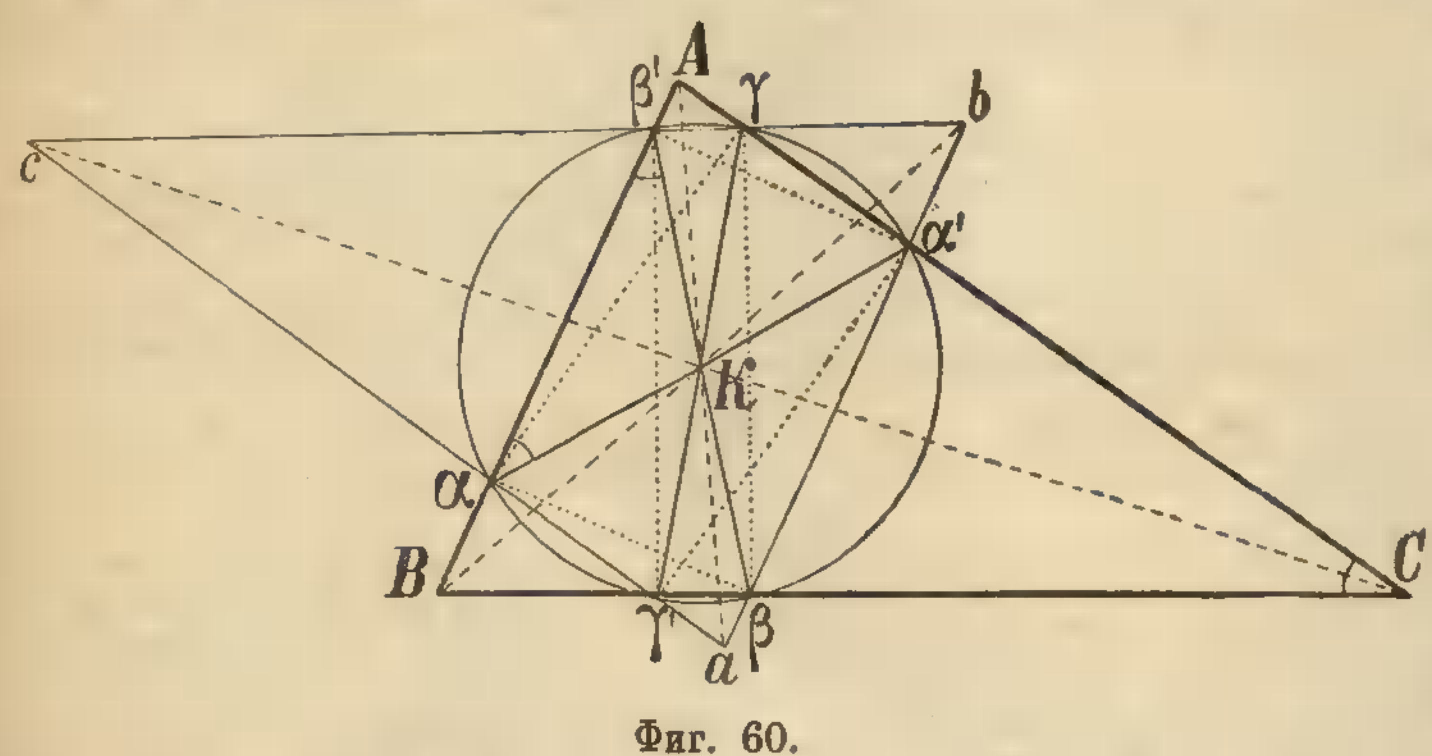
*) *Прямою Паскаля* называется прямая, проходящая чрезъ точки пересѣченія противоположныхъ сторонъ вписаннаго въ кругъ шестиугольника (II, 17).

14. Теорема. *Точки пересѣченія параллелей Лемуана* $\alpha\gamma'$, $\beta\alpha'$, $\gamma\beta'$ *съ сторонами* $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, $\alpha\alpha'$ *шестиугольника Лемуана, антипараллельными сторонамъ треугольника* ABC, *находятся на полярѣ точки* T *относительно круга Лемуана.*

Обозначимъ чрезъ P, Q, R точки пересѣченія прямыхъ $\alpha\alpha'$ и $\beta'\gamma$, $\beta\beta'$ и $\gamma'\alpha$, $\gamma\gamma'$ и $\alpha'\beta$ (фиг. 59). Треугольники A$p$P, B$q$Q, C$r$R автополярны относительно круга Лемуана (II,16); поэтому точки P, Q, R суть полюсы прямыхъ A$p$, B$q$, C$r$ относительно этого круга. Но прямыя A$p$, B$q$, C$r$, по предыдущей теоремѣ, пересѣкаются въ одной точкѣ T; слѣдовательно полюсы ихъ P, Q, R лежатъ на одной прямой, служащей полярой для T относительно круга Лемуана (II,12).

15. Теорема. *Шесть точекъ пересѣченія сторонъ треугольника съ прямыми, антипараллельными имъ и проходящими чрезъ точку Лемуана треугольника, находятся на одной окружности.*

Положимъ, что $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ суть прямыя, соотвѣтственно антипараллельныя сторонамъ треугольника BC, CA и AB и проходящія чрезъ точку Лемуана K (фиг. 60). Симедіаны треугольника AK, BK, CK дѣлятъ пополамъ антипараллели его сторонамъ (V, 19), поэтому $K\alpha = K\alpha'$, $K\beta = K\beta'$, $K\gamma = K\gamma'$. Кромѣ того $\angle A\alpha\alpha' = \angle C = \angle B\beta'\beta$; а потому $K\alpha = K\beta'$; точно также $K\gamma = K\alpha'$ и $K\beta = K\gamma'$; слѣдовательно $K\alpha = K\alpha' = K\beta = K\beta' = K\gamma = K\gamma'$, т. е. точки $\alpha$, $\beta'$, $\gamma$, $\alpha'$, $\beta$, $\gamma'$ лежатъ на одной окружности, имѣющей центръ въ точкѣ K.




Фиг. 60.

16. Слѣдствія. Треугольники $\alpha\beta\gamma$ и $\alpha'\beta'\gamma'$ равны между собою и подобны и одинаково расположены съ треугольникомъ ABC; *точки Брокара* $\Omega$ и $\Omega'$ этого треугольника служать центрами подобія его съ треугольниками $\alpha\beta\gamma$ и $\alpha'\beta'\gamma'$,

Центромъ подобія треугольниковъ $\alpha\beta\gamma$ и $\alpha'\beta'\gamma'$ служитъ точка Лемуана K треугольника ABC.

Стороны треугольниковъ $\alpha\beta\gamma$ и $\alpha'\beta'\gamma'$ перпендикулярны къ соотвѣтственнымъ сторонамъ треугольника ABC.

Отношеніе подобія каждаго изъ треугольниковъ $\alpha\beta\gamma$ и $\alpha'\beta'\gamma'$ съ треугольникомъ ABC равно

$$\frac{\alpha\Omega}{A\Omega} = \frac{\alpha'\Omega'}{A\Omega'} = \operatorname{tg}\omega,$$

гдѣ $\omega$ есть *уголъ Брокара* треугольника ABC.

17. Такъ какъ $\beta'\gamma'$ перпендикулярна къ $\gamma'\beta$ и $\beta'\gamma$, то $\beta'\gamma \parallel \gamma'\beta$ или $\beta'\gamma \parallel$ ВС; точно также $\gamma'\alpha \parallel$ СА и $\alpha'\beta \parallel$ АВ. Слѣдовательно, стороны треугольника $abc$, составленнаго прямыми $\beta'\gamma$, $\alpha'\beta$ и $\gamma'\alpha$, параллельны сторонамъ треугольника АВС. Кромѣ того, прямая $Aa$, какъ діагональ параллелограмма $A\alpha a\alpha'$ проходитъ чрезъ средину К другой его діагонали $\alpha\alpha'$; также и прямыя $Bb$ и $Cc$ проходятъ чрезъ точку К, значитъ треугольники АВС и $abc$ гомотетичны относительно ихъ общей точки Лемуана К.

Замѣтивъ, что $\beta\gamma' = \beta'\gamma$, а потому и $a\beta = A\beta'$, изъ равенства $B\beta' = b\beta$ заключаемъ, что $AB = ab$, т. е. что треугольники АВС и $abc$ равны, а отсюда слѣдуетъ, что соотвѣтственныя точки ихъ симметричны относительно ихъ центра гомотетіи К; значитъ точка К есть средина разстоянія между центрами круговъ АВС и $abc$.

Изъ этихъ выводовъ слѣдуетъ, что послѣдняя теорема (15), какъ и теорема (5), есть частный случай общей теоремы (1), изъ которой она получается какъ слѣдствіе въ предположеніи, что треугольникъ $a'b'c'$ (фиг. 58) обращается въ точку К.

*Д. Е.* (Иваново-Вознесенскъ).

*(Продолженіе слѣдуетъ).*

---

# ГЕНРИ РЕЗАЛЬ.

## (НЕКРОЛОГЪ).

Въ послѣднее время наука понесла крупныя потери: въ теченіи какихъ нибудь двухъ мѣсяцевъ одинъ за другимъ сошли въ могилу Кекуле, Грове, Физо, Резаль, Пальміери. Едва ли мы ошибемся, если скажемъ, что имя Резаля пользуется у насъ меньшей популярностью, нежели имена его собратій, унесенныхъ смертью почти одновременно съ нимъ. А между тѣмъ Резаль вполнѣ заслуживаетъ популярности: это былъ человѣкъ „съ золотымъ сердцемъ", какъ говорятъ знавшіе его лично; это былъ ученый, всецѣло посвятившій себя наукѣ и ея приложеніямъ, работавшій въ различныхъ областяхъ знанія и вездѣ, гдѣ работалъ, оставившій послѣ себя вѣчные слѣды; это былъ, кромѣ того, ученый практикъ, умѣвшій находить приложенія для отвлеченныхъ истинъ чистаго знанія; „сынъ архитектора, я держалъ въ рукахъ лопатку каменьщика, прежде чѣмъ научился держать перо", говаривалъ часто онъ самъ; это былъ, наконецъ, труженикъ въ полномъ смыслѣ этого слова: „Резаль соединялъ въ себѣ два рѣдкихъ качества, — говоритъ Леви, — работа давалась ему чрезвычайно легко и онъ работалъ всегда. Работа была единственнымъ его развлеченіемъ, когда онъ хорошо себя чувствовалъ, и единственнымъ лекарствомъ, лекарствомъ опаснымъ, когда его крѣпкое здоровье начало поддаваться".

Amé-Henry Resal родился въ 1829 году. Подъ руководствомъ своего отца, архитектора въ Plombières онъ чрезвычайно легко, скорѣе забавляясь, чѣмъ учась, подготовился къ поступленію въ collège d'Epinal, перешелъ затѣмъ въ collège à Sainte-Barbe и 18-ти лѣтъ отъ роду былъ принятъ въ Политехническую Школу. Это было въ 1847 году, когда великія открытія Ампера въ области электродинамики стали входить въ учебные курсы физики. Резаль увлекается этими открытіями и посвящаетъ имъ свой первый научный трудъ, выполненный еще во время его пребыванія въ Политехнической Школѣ. Что этотъ трудъ не былъ обыкновенной ученической работой, это видно уже изъ того, что А. Бравэ, профессоръ Резаля, пользовался частью его мемуара при своихъ лекціяхъ. Ко времени его ученичества въ Политехнической Школѣ относится еще работа: теорія тренія при коническихъ зубчатыхъ зацѣпленіяхъ и безконечномъ винтѣ. Эта работа была напечатана въ 1850 г. въ *Journal de l'École Polytechnique*.

Выйдя изъ школы онъ избралъ себѣ карьеру горнаго инженера и поступилъ въ École des Mines. Получивъ 1853 г. званіе горнаго инженера въ Безансонѣ, онъ занялся составленіемъ геологической карты гористой мѣстности страны, не покидая однако своихъ математическихъ занятій. Уже въ слѣдующемъ 1854 году онъ получилъ степень доктора математическихъ наукъ. Для докторской диссертаціи онъ избралъ себѣ тему о приложеніи къ земному шару задачи о равновѣсіи сферической оболочки. Этой диссертаціей онъ снискалъ себѣ покровительство знаменитыхъ Коши и Ламэ, предъ которыми защищалъ ее; его ученическія работы еще раньше доставили ему дружбу Понселэ, которая продолжалась всю жизнь.

Въ 1855 г. мы находимъ Резаля уже профессоромъ въ Безансонѣ. Съ этого года, если не считать ученическихъ работъ, Резаль посвящаетъ себя механикѣ. Въ Безансонѣ онъ пишетъ цѣлый рядъ работъ: чистая кинематика, учебникъ небесной механики, служащій подготовкой къ книгѣ Лапласа, нѣсколько теоретическихъ и практическихъ статей по часовому мастерству, много способствовавшихъ прогрессу въ дѣлѣ изготовленія точныхъ приборовъ для измѣренія времени:—всѣ эти работы доказываютъ, что въ лицѣ Резаля представитель чистой науки счастливо соединился съ практикомъ.

Въ 1872 г., по смерти Бура, Резаль занялъ его кафедру раціональной механики въ Политехнической Школѣ. Въ этомъ же году онъ началъ изданіе своего учебника общей механики въ 7-и томахъ. Въ этомъ учебникѣ резюмированы между прочимъ главнѣйшія изъ предыдущихъ работъ Резаля. Книга посвящена раціональной механикѣ и ея приложеніямъ во всѣхъ направленіяхъ. Одна изъ замѣтокъ въ этой книгѣ посвящена движенію снаряда внутри орудія, гдѣ впервые принципы термодинамики приложены

къ объясненію сложнаго явленія развитія давленія вслѣдствіе горѣнія взрывчатаго вещества внутри орудія. Эта замѣтка, а также нѣсколько другихъ мемуаровъ Резаля о движеніи снарядовъ, заставили военнаго министра создать для Резаля особый постъ: — должность прикомандированнаго къ артиллерійской коммиссіи для научныхъ изысканій.

Мы не останавливаемся подробно на другихъ относящихся къ этой эпохѣ трудахъ Резаля въ области механики. Отмѣтимъ только его работу о распространеніи волнъ жидкости въ эластическихъ трубкахъ—работу, которая объясняетъ многія явленія кровообращенія и которой отчасти воспользовался Марей при устройствѣ своихъ общеизвѣстныхъ приборовъ, записывающихъ біенія сердца, движенія грудной клѣтки при дыханіи и т. п.

Въ 1873 г. Резаль занялъ мѣсто барона Dupui въ Академіи Наукъ. Вступленіе въ Академію только усилило его рвеніе къ работѣ, какъ доказываютъ отчеты Академіи и *Annales des Mines* за послѣдніе двадцать лѣтъ. Кромѣ этихъ работъ Резаль издалъ еще въ 1888 г. учебникъ математической физики, играющій ту же роль по отношенію къ этой наукѣ, какъ ранѣе изданный имъ курсъ небесной механики по отношенію къ труду Лапласа, и работалъ надъ вторымъ изданіемъ своей Общей Механики.

Въ серединѣ августа настоящаго года Резаль опасно заболѣлъ. Нѣсколько оправившись, онъ рѣшилъ поѣхать на выставку въ Женеву, но на пути, въ Annemasse, болѣзнь (интестинальная атонія) возвратилась къ нему съ такой силой, что нечего было и думать о продолженіи поѣздки. $^{10}/_{22}$ августа Резаля не стало.

*В. Г.*

# НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

**Перемѣщеніе магнитныхъ полюсовъ.** — Какъ передаетъ журналъ *Ciel et Terre*, проф. Вейеръ въ Килѣ, воспользовавшись длинными рядами наблюденій, вычислилъ положеніе магнитныхъ полюсовъ въ различныя эпохи. Для своихъ вычисленій онъ выбралъ наблюденія, производившіяся въ 19-ти различныхъ пунктахъ и охватывающія періоды отъ 167 лѣтъ (Стокгольмъ) до 369 лѣтъ (Парижъ). Въ 1680 году, по Вейеру, сѣверный магнитный полюсъ находился подъ 80°28′ с. ш. и 150°0′ зап. долг.; затѣмъ, впродолженіи ста слишкомъ лѣтъ его широта и долгота постепенно уменьшались и въ 1800 году онъ лежалъ уже

подъ 92°7′ зап. долг., и широта его достигла своего наименьшаго значенія въ 1830 году (77°); въ 1890 году она достигла уже 78°51′.

Южный магнитный полюсъ въ 1640 году находился подъ 67°55 ю. ш. и 164°15′ вост. долг. Во время всего періода, за который имѣются наблюденія, онъ передвигался къ западу и въ 1890 году его долгота уменьшилась до 93°23′. Широта же его сперва возрастала до 74°23′ (въ 1830 г.), а затѣмъ стала уменьшаться и достигла 72°59′ въ 1890 году.

Если выводы Вейера справедливы, то изъ нихъ можно сдѣлать два заключенія: 1) перемѣщенія магнитныхъ полюсовъ весьма значительны, и 2) перемѣщенія южнаго полюса не согласуются съ перемѣщеніями сѣвернаго.

Весьма страннымъ намъ кажется одно лишь обстоятельство: въ 1831 году капитанъ Россъ во время своей полярной экспедиціи открылъ сѣверный магнитный полюсъ и опредѣлилъ его положеніе подъ 70°5′ с. ш. и 96°46′ зап. долготы. Эти числа далеко не совпадаютъ съ числами Вейера, вычисленными для 1830 года. Вейеръ именно даетъ 77°0′ сѣв. шир. и 95°38′ зап. долготы.

*В. Г.*

**Дѣйствіе *x*-лучей на волоса.** — Въ журналѣ *Science* помѣщена статья, въ которой нѣкто г. *Daniel* передаетъ слѣдующій фактъ: ему пришлось фотографировать въ лучахъ Рёнтгена голову ребенка для точнаго опредѣленія положенія засѣвшей въ ней пули. Расположеніе приборовъ ничѣмъ не отличалось отъ обыкновеннаго: трубка Рёнтгена была помѣщена на разстояніи полудюйма отъ черепа, покрытаго волосами и экспозиція продолжалась часъ. Черезъ 21 день послѣ опыта у ребенка начали падать волосы на томъ мѣстѣ, которое подвергалось дѣйствію *x*-лучей, такъ что образовывалась лысина діаметромъ приблизительно въ 2 дюйма; кожа оказалась совершенно здоровой, паціентъ не испытывалъ никакой боли, никакихъ страданій. Явленіе это не можетъ быть объяснено ни нагрѣваніемъ головы отъ трубки Рёнтгена, ни тѣмъ, что между головой и однимъ изъ электродовъ трубки могли проскакивать маленькія искры.

Интересно было бы провѣрить этотъ фактъ на здоровомъ субъектѣ, у котораго нѣтъ пули въ головѣ.

*В. Г.*

**Новое приложеніе *x*-лучей.** — *La Nature* сообщаетъ, не ручаясь за достовѣрность факта, будто одинъ докторъ въ Чикаго открылъ, что мускулы мертвеца значительно менѣе прозрачны для лучей Рёнтгена, чѣмъ мускулы живого человѣка, и что, пользуясь этимъ обстоятельствомъ, можно съ достовѣрностью отличать дѣйствительно умершаго отъ обмершаго. Не мѣшало бы провѣрить это сообщеніе.

**Растеніе-компасъ.** — Существуютъ растенія, какъ передаетъ *Garden and Forest*, листья которыхъ обладаютъ способностью указывать

сѣверъ и югъ. Къ такимъ растеніямъ относятся два вида *Silphium*, а именно *Silphium lacinatum* и *Silphium terebintinaceum*. Листья этого послѣдняго растенія поворачиваются такимъ образомъ, что широкія ихъ стороны обращены къ востоку и западу, а концы, слѣдовательно, указываютъ сѣверъ и югъ. Это особенно замѣтно на молодыхъ экземплярахъ. До какой степени ясно замѣтна такая оріентировка листьевъ, можно видѣть по сообщенію сэра Joseph'а Hooker'а, который, находясь въ поѣздѣ желѣзной дороги, проходившему по равнинѣ, на которой росъ *Silphium*, имѣлъ возможность безошибочно судить по общему виду растеній, когда желѣзнодорожный путь мѣнялъ свое направленіе.—(Rev. Scient.).

# ОПЫТЫ и ПРИБОРЫ.

**Демонстрированіе теплопрозрачности различныхъ тѣлъ.** — Какъ извѣстно, существуютъ вещества, мѣняющія свой цвѣтъ при измѣненіяхъ температуры. Такъ напр. двойная іодистая соль серебра и ртути при комнатной температурѣ имѣетъ желтый цвѣтъ, который уже при $49^0$ переходитъ въ пурпурно-розовый, возвращаясь опять къ желтому цвѣту при охлажденіи. Если покрыть этой солью листъ картона и приблизить къ нему сильно нагрѣтый металлическій шарикъ. то теплочувствительный слой соли тотчасъ же краснѣетъ Явленіе не измѣняется, если между источникомъ тепла и картономъ помѣстить пластинку изъ теплопрозрачнаго вещества, напр. изъ эбонита, но если вмѣсто эбонита взять вещество, непрозрачное для тепловыхъ лучей, то на розовый фонъ экрана ясно проэктируется желтая „тѣнь“ взятаго тѣла. Опыты эти можно, конечно, разнообразить до безконечности.

Двойная іодистая соль серебра и ртути, необходимая для этихъ опытовъ готовится слѣдующимъ образомъ. Смѣшиваютъ 1 часть по вѣсу іодной ртути ($HgJ_2$) съ 2-мя частями іодистаго серебра ($AgJ$), къ смѣси прибавляютъ спирта, слегка нагрѣваютъ, постоянно помѣшивая смѣсь и отъ времени до времени прибавляя спирта. Красная первоначально смѣсь переходитъ по истеченіи нѣкотораго времени въ желтую. Тогда ее выпариваютъ до суха, продолжая нагрѣваніе, и наконецъ покрываютъ ею листъ картона.

Этотъ простой и изящный способъ, дающій возможность обойтись безъ дорого стоющихъ приборовъ, предложенъ д-ромъ *Silvio Lussana*. —La Nature).

# ИЗОБРѢТЕНІЯ и ОТКРЫТІЯ.

**Флуороскопъ Эдисона.** — Этотъ чрезвычайно простой приборъ даетъ возможность прямо наблюдать различные предметы въ лучахъ Рёнтгена, не прибѣгая къ помощи фотографіи, требующей болѣе или менѣе продолжительнаго времени для экспозиціи и для проявленія полученнаго изображенія. Какъ видно изъ прилагаемыхъ рисунковъ, приборъ имѣетъ форму стереоскопа и представляетъ собою деревяный ящикъ, болѣе узкая часть котораго открыта, причемъ отверстію дана такая форма, чтобы края его совершенно охватывали глазныя орбиты наблюдателя, не пропуская внѣшняго свѣта внутрь прибора. Болѣе ши-



Фиг. 61.

рокая сторона ящика закрыта листомъ бумаги, на внутреннюю сторону котораго нанесенъ слой флуоресцирующаго вещества, главнымъ образомъ—вольфрамовокислаго кальція. Способъ употребленія прибора чрезвычайно простъ: изслѣдуемый предметъ помѣщается между круксовой трубкой, находящейся въ деревяномъ ящикѣ, и флуороскопомъ, а наблюдатель глядитъ въ приборъ. По прошествіи нѣсколькихъ секундъ кристаллы вольфрамовокислаго кальція начинаютъ флуоресцировать и на нихъ ясно и отчетливо выступаютъ тѣни предметовъ, непрозрачныхъ для $x$-лучей.

Для успѣха опыта необходимо весьма значительное разрѣженіе въ круксовой трубкѣ. Между тѣмъ извѣстно, что степень разрѣженія даже въ самыхъ лучшихъ образцахъ трубокъ измѣняется уже по прошествіи нѣсколькихъ дней: трубки мало по малу наполняются газомъ. Чтобы избѣжать этого неудобства, Эдисонъ пользуется трубками, находящимися въ сообщеніи съ сильной пневматической машиной, которая одно-



Фиг. 62.

временно служитъ и манометромъ, указывающимъ степень разрѣженія газа внутри трубки. Приборъ этотъ изображенъ на второмъ изъ нашихъ рисунковъ (фиг. 62).

Въ настоящее время Эдисонъ занятъ дальнѣйшимъ усовершенствованіемъ флуороскопа.—(*La Nature*).

*В. Г.*

**Превращеніе силы тяготѣнія въ электрическую энергію.**—Въ С.-Америкѣ, въ штатѣ Мичиганъ, въ желѣзномъ рудникѣ устроено весьма интересное приспособленіе для поднятія пустыхъ вагоновъ на высоту: копи находятся на высокой горѣ и добытая тамъ руда перевозится внизъ по желѣзной дорогѣ. Для обратнаго поднятія пустыхъ вагоновъ употребляется обыкновенно система желѣзной дороги съ безконечнымъ проволочнымъ канатомъ. Въ данномъ случаѣ эта система не могла быть примѣнена, такъ какъ пустые вагоны приходится поднимать съ противоположной стороны горы. Поэтому на одномъ изъ ва-

гоновъ установили динамо-машину, въ которой возбуждается токъ вращеніемъ осей вагона; въ электрическую энергію здѣсь превращается слѣдовательно энергія притягательнаго дѣйствія земли. При помощи особаго провода динамо-машина передаетъ токъ къ аккумуляторамъ. Электрической энергіи, которая скопляется въ аккумуляторахъ, не только достаточно для поднятія пустыхъ вагоновъ, но остается еще запасъ ея, которымъ пользуются для различныхъ цѣлей по хозяйству рудниковъ.—(Ж. Нов. Откр. и Изобр.).

# РАЗНЫЯ ИЗВѢСТІЯ.

Въ *Comptes Rendus* отъ 17 сент. (н. с.) помѣщено письмо директора Пулковской Обсерваторіи Баклунда объ экспедиціи на Новую Землю для наблюденія солнечнаго затменія 9-го августа. Не смотря на то, что пасмурная погода отчасти мѣшала наблюденіямъ, экспедицію можно назвать вполнѣ удачной; первый контактъ наблюдался при вполнѣ ясномъ небѣ. Получено 12 хорошихъ фотографій и на нѣкоторыхъ изъ нихъ корона видна отчетливо на большомъ протяженіи. Экспедиція прибыла на мѣсто назначенія за три недѣли до затменія, что дало возможность кн. Голицыну произвести при помощи гг. Костинскаго, Фанскаго и Гольдберга многочисленныя метеорологическія и магнитныя наблюденія. Съ Новой Земли г. Баклундъ, по приглашенію сэра Boden-Powell'я отправился въ Гаммерфестъ, гдѣ видѣлъ Нансена и его товарищей по путешествію.

На Новой Землѣ производили наблюденія еще двѣ экспедиціи: одна была организована Казанскимъ университетомъ подъ руководствомъ проф. Дубяго, другая англійская, прибыла съ сэромъ Boden-Powell'емъ на его яхтѣ *Ottaria*. Обѣ эти экспедиціи были вполнѣ удачны. Такъ же успѣшно произвела наблюденія и русская экспедиція, отправившаяся на Амуръ. По телеграммѣ г. Бѣлопольскаго удалось получить тамъ шесть фотограммъ короны и ея спектра.

Наблюденіямъ послѣдняго солнечнаго затменія 28 іюля (9 авг.) во многихъ мѣстахъ помѣшали облака. Въ Вадсе, на сѣверо-восточномъ берегу Норвегіи, куда съѣхалось много членовъ британской астрономической ассоціаціи, было хорошо видимо лишь начало затменія, но къ той минутѣ, когда лунный дискъ совершенно покрылъ солнце, небо заволоклось облаками. Собравшимся астрономамъ оставалось только любоваться эффектной картиной затменія на землѣ: окрестныя горы и заливъ съ безчисленными судами заволакивались темнотой, позволявшей различать лишь силуэты судовъ и яркія точки горѣвшихъ на нихъ огней. Темнота продолжалась минуту и 40 секундъ. Все стихло; слышался лишь полетъ птицъ надъ головами зрителей. Въ просвѣтахъ между облаками различались звѣзды, а вершины дальнихъ горъ ярко сіяли. — Затменіе было ясно видимо въ Даніи, въ Іокогамѣ. Въ Токіо облака совершенно воспрепятствовали наблюденіямъ.

*Величайшій метеоритъ*, изъ всѣхъ, извѣстныхъ до настоящаго времени, открытъ въ прошломъ году лейтенантомъ Порри въ Гренландіи. Метеоритъ этотъ вѣситъ почти $2^1/_2$ тысячи пудовъ. Какъ сообщаютъ иностранныя газеты, Филадельфійская Академія Наукъ снаряжаетъ экспедицію для перевозки этого метеорита въ Америку. – (Ж. Нов. Откр. и Изобр.).

Въ настоящее время готовится подъ руководствомъ проф. Langley'я экспедиція для опредѣленія точнаго положенія сѣвернаго магнитнаго полюса.

Городъ Комъ (Côme), родина Вольты, готовится отпраздновать въ 1899 г столѣтіе открытія вольтова столба. Съ этой цѣлью предполагается устроить выставку и созвать конгрессъ электричества. Открытіе вольтова столба относится къ 1799 г., какъ заявилъ это самъ Вольта въ частномъ письмѣ къ своему другу, профессору Моккетти.

⟡ Газетѣ „Школьное Обозрѣніе“ разрѣшено г. министромъ внутреннихъ дѣлъ расширить программу включеніемъ въ нее научно-популярнаго и литературно-беллетристическаго отдѣловъ, [redacted] также замѣнить названіе „Школьное Обозрѣніе“ названіемъ „Жизнь и Школа“.

⟡ На сооруженіе памятника Лавуазье въ Парижѣ въ редакцію „Вѣстника Оп. Физики“ поступили слѣдующія пожертвованія: отъ редакціи „Вѣстника Опытн. Физики“—10 р.; отъ г. *Мочана*—1 р.; отъ Аптеки А. Гаевскаго [redacted] А. Поповскаго—1 р.; отъ г. *Кофмана*—50 к.; отъ г.г. Ф. А., В. Д., N.—по 20 к., а всего 13 р. 10 к.

⟡ По послѣднимъ статистическимъ свѣдѣніямъ въ Соединенныхъ Штатахъ С. Америки передаютъ въ годъ 65 милліоновъ телеграммъ, а число разговоровъ по телефону достигаетъ 750 милліоновъ. въ С.-Штатахъ имѣется 2700 центральныхъ станцій электрическаго освѣщенія и 7000 частныхъ установокъ; станціи эти питаютъ [redacted] милліонъ лампъ съ регуляторомъ и 15 милліоновъ лампъ накаливанія. Общая длина электрическихъ желѣзныхъ дорогъ достигаетъ 12000 миль, на которыхъ циркулируютъ 25000 вагоновъ. Наконецъ, число лицъ, живущихъ прямо или косвенно на счетъ электрической промышленности, доходитъ до почтенной цифры $2^1/_2$ милліона человѣкъ. — (La Nature).

# ЗАДАЧИ.

**№ 355.** Двѣ равныя окружности пересѣкаются въ точкѣ $M$. Провести черезъ эту точку прямую $AB$, пересѣкающую окружности въ точкахъ $A$ и $B$, такъ чтобы хорды $MA$ [redacted] $MB$ удовлетворяли уравненію:

$$\frac{1}{MA} \pm \frac{1}{MB} = \frac{1}{l},$$

гдѣ $l$ есть данная прямая.

*П. Свѣшниковъ* (Уральскъ).

**№ 356.** Черезъ точку пересѣченія $M$ двухъ равныхъ окружностей провести прямую $AB$, пересѣкающую ихъ въ точкахъ $A$ и $B$, такъ чтобы сумма квадратовъ хордъ $MA$ и $MB$ равнялась квадрату данной прямой $l$.

*П. Свѣшниковъ* (Уральскъ).

**№ 357.** Треугольникъ $ABC$ и описанную около него окружность пересѣчь прямою, параллельною $BC$, такъ, чтобы отрѣзки этой прямой, ограниченные окружностью и сторонами угла $BAC$, были въ данномъ отношеніи.

(Заимств.) *Д. Е.* (Иваново-Вознесенскъ).

**№ 358.** Показать, что во всякомъ треугольникѣ

$$\sin\frac{A}{2} \cdot \sin\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{C}{2} \leqslant 1/8.$$

*Я. Полушкинъ* (Знаменка).

**№ 359.** Изъ центра $O$ вписаннаго въ треугольникъ $ABC$ круга радіусомъ $d$ описана окружность. Показать, что площадь вписаннаго въ

эту окружность шестиугольника, вершины котораго лежатъ на биссекторахъ угловъ $A$, $B$, $C$, равна:

$$4d^2 . \sin\left(45^0 + \frac{A}{4}\right) \cdot \sin\left(45^0 + \frac{B}{4}\right) \cdot \sin\left(45^0 + \frac{C}{4}\right).$$

*М. Зиминъ* (Елецъ).

**№ 360.** Изъ вершины прямого угла $B$ треугольника $ABC$ опущенъ на гипотенузу перпендикуляръ $BD$; изъ точки $A$, какъ изъ центра, описана окружность радіусомъ $AB$. Показать, что прямая, соединяющая любую точку $K$ этой окружности съ точкой $D$, перпендикулярна къ проходящему черезъ точку $A$ діаметру круга, описаннаго около треугольника $AKC$.

*Ученики Кіево-Печерской гимназіи Л. и Р.*

# РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

**№ 287** (3 сер.) Показать, что если вписанный въ треугольникъ $ABC$ кругъ касается сторонъ $BC$, $AC$, $AB$ соотвѣтственно въ точкахъ $A'$, $B'$ и $C'$, то

$$a . \overline{AA'}^2 + b . \overline{BB'}^2 + c . \overline{CC'}^2 = p(2p^2 + a^2 + b^2 + c^2) - 2(a^3 + b^3 + c^3) - 3abc$$

и

$$b . \overline{BB'}^2 - c . \overline{CC'}^2 = \frac{b-c}{2}(a^2 + b^2 + c^2 - 2p^2),$$

гдѣ

$$a = BC,\ b = AC,\ c = AB \text{ и } 2p = a + b + c.$$

По теоремѣ Стьюарта имѣемъ:

$$c^2 . A'C + b^2 A'B - a . \overline{AA'}^2 = a . A'B . A'C,$$

$$a^2 . AB' + c^2 . B'C - b . \overline{BB'}^2 = b . AB' . B'C,$$

$$a^2 . AC' + b^2 . BC' - c . \overline{CC'}^2 = c . AC' . BC'.$$

Отсюда находимъ:

$$a . \overline{AA'}^2 + b . \overline{BB'}^2 + c . \overline{CC'}^2 = a^2(AB' + AC') + b^2(A'B + BC') + c^2(A'C + B'C) - $$
$$- a . A'B . A'C - b . AB' . B'C - c . AC' . BC'.$$

Но извѣстно, что

$$AB' = AC' = p - a,\ A'B = BC' = p - b,\ A'C = B'C = p - c;$$

поэтому

$$a . \overline{AA'}^2 + b . \overline{BB'}^2 + c . \overline{CC'}^2 = 2a^2(p-a) + 2b^2(p-b) + 2c^2(p-c) -$$
$$- a(p-b)(p-c) - b(p-a)(p-c) - c(p-a)(p-b).$$

Открывъ скобки и произведя упрощенія, получимъ первое изъ требуемыхъ соотношеній.

Пользуясь вторымъ и третьимъ изъ равенствъ Стьюарта, легко выведемъ и второе изъ требуемыхъ соотношеній.

*М. Зиминъ* (Орелъ); *ученики Кіево-Печерской гимназіи Л. и Р.; Э. Заторскій* (Вильно) (неполное рѣшеніе).

**№ 288** (3 сер.). Построить треугольникъ по радіусу описаннаго круга, по биссектрисѣ угла $A$ и по высотѣ, проведенной изъ вершины того же угла $A$.

Пусть $O$ есть центръ круга, описаннаго около треугольника $ABC$, $AD$ — высота и $AE$ — биссекторъ угла $A$. Такъ какъ $\angle BAE = \angle CAE$ и $\angle BAO = \angle DAC$, то $\angle OAE = \angle EAD$. Отсюда слѣдуетъ такое построеніе: строимъ прямоугольный треугольникъ $ADE$ по катету $AD$ и гипотенузѣ $AE$. Черезъ точку $A$ проводимъ прямую, наклоненную къ гипотенузѣ подъ угломъ $EAD$ и на ней отъ точки $A$ откладываемъ отрѣзокъ $AO$, равный данному радіусу. Изъ точки $O$ радіусомъ $AO$ описываемъ окружность, которая въ пересѣченіяхъ съ прямою $DE$ дастъ вершины $B$ и $C$ треугольника.

*М. Зиминъ* (Орелъ); *ученики Кіево-Печеской гимназіи Л. и Р.*; *Э. Заторскій* (Вильно); *Свищовъ* (Спб.); *С. Циклинскій* (Пинскъ); *Ю. Идельсонъ* (Одесса); *В. Ковальскій* (Варшава); *ученики Тамбовской гимназіи С. Н—въ и И. Х—нъ.*

**№ 289** (3 сер.). Внутри четырегранника $ABCD$ взята точка $M$ и проведены прямыя $AM$, $BM$, $CM$, $DM$ соотвѣтственно до пересѣченія съ гранями $BCD$, $ACD$, $ABD$, $ABC$ въ точкахъ $a$, $b$, $c$, $d$.

Показать, что

$$\frac{Ma}{Aa}+\frac{Mb}{Bb}+\frac{Mc}{Cc}+\frac{Md}{Dd}=1,$$

$$\frac{AM}{Aa}+\frac{BM}{Bb}+\frac{CM}{Cc}+\frac{DM}{Dd}=3,$$

$$\frac{AM.BM.CM.DM}{Ma.Mb.Mc.Md}=\frac{AM.BM}{Ma.Mb}+\frac{AM.CM}{Ma.Mc}+\frac{AM.DM}{Ma.Md}+\frac{BM.CM}{Mb.Mc}+$$

$$+\frac{BM.DM}{Mb.Md}+\frac{CM.DM}{Mc.Md}+2\left(\frac{AM}{Ma}+\frac{BM}{Mb}+\frac{CM}{Mc}+\frac{DM}{Md}\right)+3.$$

Показать, какъ измѣнятся эти соотношенія, если точка $M$ будетъ взята внѣ четырегранника и внутри трегранного угла, имѣющаго вершину въ точкѣ $D$.

Объемы тетраэдровъ $ABCD$ и $MBCD$ относятся какъ ихъ высоты, опущенныя изъ $A$ и $M$, а эти высоты относятся какъ $Aa:Ma$; поэтому

$$\frac{Ma}{Aa}=\frac{MBCD}{ABCD};\text{ точно такъ же }\frac{Mb}{Bb}=\frac{MACD}{ABCD};\frac{Mc}{Cc}=\frac{MABD}{ABCD};$$

$$\frac{Md}{Dd}=\frac{MABC}{ABCD}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Сложивъ эти равенства, получимъ:

$$\frac{Ma}{Aa}+\frac{Mb}{Bb}+\frac{Mc}{Cc}+\frac{Md}{Dd}=1 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2).$$

Если изъ тожества

$$\frac{Aa}{Aa}+\frac{Bb}{Bb}+\frac{Cc}{Cc}+\frac{Dd}{Dd}=4$$

вычтемъ почленно равенство (2), то получимъ:

$$\frac{AM}{Aa}+\frac{BM}{Bb}+\frac{CM}{Cc}+\frac{DM}{Dd}=3.$$

Представивъ равенство (2) въ видѣ

$$\frac{Ma}{AM+Ma}+\frac{Mb}{BM+Mb}+\frac{Mc}{CM+Mc}+\frac{Md}{DM+Md}=1,$$

и положивъ

$$\frac{AM}{Ma}=\alpha,\ \frac{BM}{Mb}=\beta,\ \frac{CM}{Mc}=\gamma,\ \frac{DM}{Md}=\delta,$$

получимъ

$$1=\frac{1}{\alpha+1}+\frac{1}{\beta+1}+\frac{1}{\gamma+1}+\frac{1}{\delta+1},$$

откуда

$$(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)(\delta+1)=(\beta+1)(\gamma+1)(\delta+1)+(\alpha+1)(\gamma+1)(\delta+1)+$$
$$+(\alpha+1)(\beta+1)(\delta+1)+(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1).$$

Раскрывъ въ этомъ равенствѣ скобки, получимъ послѣ упрощеній:

$$\alpha\beta\gamma\delta=\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta+2(\alpha+\beta+\gamma+\delta)+3.$$

Замѣнивъ здѣсь $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ и $\delta$ ихъ значеніями, получимъ третье изъ требуемыхъ соотношеній.

Если точка $M$ лежитъ внѣ четырегранника $ABCD$, но внутри трегранного угла, имѣющаго вершину въ $D$, то

$$\text{об. } MABC - \text{об. } MABD - \text{об. } MBCD - \text{об. } MACD = \text{об. } ABCD.$$

Поэтому вмѣсто перваго изъ искомыхъ соотношеній будемъ имѣть:

$$\frac{Md}{Dd}-\frac{Ma}{Aa}-\frac{Mb}{Bb}-\frac{Mc}{Cc}=1.$$

Изъ этого основного равенства получимъ:

$$\frac{MA}{Aa}+\frac{MB}{Bb}+\frac{MC}{Cc}-\frac{MD}{Dd}=3$$

и

$$\frac{AM.BM.CM.DM}{Ma.Mb.Mc.Md}=\frac{AM.BM}{Ma.Mb}+\frac{AM.CM}{Ma.Mc}+\frac{AM.DM}{Ma.Md}+\frac{BM.CM}{Mb.Mc}+$$

$$+\frac{MB.DM}{Mb.Md}+\frac{CM.DM}{Mc.Md}-2\left(\frac{AM}{Ma}+\frac{BM}{Mb}+\frac{CM}{Mc}+\frac{DM}{Md}\right)+3.$$

*М. Зиминъ* (Орелъ); *Я. Полушкинъ* (с. Знаменка).

# ОБЗОРЪ НАУЧНЫХЪ ЖУРНАЛОВЪ.

## Bulletin de la Société Astronomique de France.

### 1896. — № 6.

**Les radiations solaires et les couleurs.** *C. Flammarion.*—Съ цѣлью изслѣдовать, какіе лучи спектра производятъ наилучшее дѣйствіе на растительность, Фламмаріонъ выбралъ восемь одинаковыхъ по росту и посѣянныхъ въ одну и ту же почву мимозъ и разсадилъ ихъ попарно въ горшки; горшки были поставлены въ четыре стекляныхъ теплицы — обыкновеннаго бѣлаго стекла, краснаго, зеленаго и темносиняго; въ день посадки (4 іюля) всѣ экземпляры мимозъ были ростомъ въ 27 мил.; въ слѣдующей таблицѣ показанъ ихъ ростъ въ разное время:

| | Красная | Зеленая | Бѣлая | Синяя |
|---|---|---|---|---|
| 6 сентября | 0,220 метра | 0,090 | 0,045 | 0,027 |
| 27 „ | 0,345 | 0,150 | 0,080 | 0,027 |
| 22 октября | 0,420 | 0,152 | 0,100 | 0,027 |

Наибольшая чувствительность получилась у мимозъ въ красной теплицѣ: отъ дуновенія листочки складывались и стебельки опускались; въ синей же теплицѣ мимоза потеряла чувствительность. Первая мимоза (въ кр тепл.) зацвѣла 24 сент.; бѣлая же, въ ущербъ росту, стала крѣпче и дала только бутоны. Самая яркая листва оказалась у красной и самая темная у синей. Подобныя же явленія, но менѣе отчетливо, наблюдались на герани, земляникѣ.

**Société Astr. de France.** *Séance du 6 Mai.*

**Etudes lunaires. Hévélius.** *C. M. Gaudibert.*—Лунный циркъ Гевелій, расположенный между 65°—70° вост. долг. и 0°—5° сѣв. шир., видѣнъ въ перспективѣ и очень труденъ для изученія; поэтому даже въ образцовой картѣ Шмидта въ немъ отмѣчено очень мало подробностей. Продолжительныя наблюденія Gaudibert дали ему возможность составить приложенный къ статьѣ рисунокъ этого цирка, на которомъ отмѣчено довольно много подробностей.

**La double oscillation diurne de l'humidité de la terre.** *D. Eginitis.*—Гигрометрическія наблюденія въ Аѳинской національной обсерваторіи, производившіяся съ 1893 г. при помощи регистрирующаго гигрометра Ричарда, обнаружили существованіе втораго maximum и 2-го minimum въ суточномъ измѣненіи относительной влажности; второй maximum въ 7 ч. в. зимою и въ 8 ч. в. лѣтомъ; второй minimum слѣдуетъ за вторымъ maximum часа чрезъ 2—4. Изъ 100 главныхъ maximum 57 приходится на утреннія и 43 на вечернія. Второй minimum менѣе ясно обозначенъ и гораздо рѣже бываетъ главнымъ. Вторыя maximum и minimum Eginitis приписываетъ измѣненію абсолютной влажности, которое въ странахъ приморскихъ очень замѣтно; свое мнѣніе онъ подтверждаетъ тѣмъ, что вторичное колебаніе влажности замѣтно при всякомъ направленіи вѣтра и даже въ тѣ дни, когда нѣтъ бриза.

**Saturne d'après les observations à l'observatoire Manora.** *Léo Brenner.*— Наблюденія Léo Brenner'a и Fauth'a (26 апрѣля) подтвердили открытіе Антоніади—существованіе новаго просвѣта въ среднемъ кольцѣ Сатурна; но, не смотря на прекрасное состояніе неба (видны были всѣ 8 спутниковъ и просвѣтъ Энке) имъ удалось замѣтить изъ трехъ просвѣтовъ Антоніади только одинъ средній.

**Dipleidoscope à latitude variable ou instrument méridien des passages.** *R. Mailhat.*

**Nouvelles de la science. Variétés.**

**Le ciel en juin.**

# ПРИСЛАНЫ ВЪ РЕДАКЦІЮ КНИГИ и БРОШЮРЫ:

46. **Новѣйшая русско-нѣмецкая азбука** для обученія въ 1 мѣсяцъ нѣмецкому чтенію, письму и разговору съ образцами письма и съ картинками. *Плято ф. Рейсснера.* X-ое изданіе. Варшава. 1896. Ц. 35 к.

47. **Къ оро-гидрографіи Нижне-Исетской дачи, въ Среднемъ Уралѣ.** *В. Рожкова* (съ орографической картой). (Труды Общества Естествоиспытателей при Императорскомъ Казанскомъ Университетѣ. Т. XXX, вып. 1). Казань. 1896. Ц. 60 к.

48. **Матеріалъ къ познанію флоры Южнаго Урала. Матеріалы къ флорѣ губерній Пензенской и Саратовской.** *И. Спрыгина.* (Труды Общества Естествоиспыт. при Императорскомъ Казанскомъ Университетѣ. Т. XXIX, вып. 6). Казань, 1896. Ц. 65 к.

49. **Матеріалы къ познанію флоры Южнаго Урала.** *А. Мечъ.* (Труды Общ. Естествоиспыт. при Императорскомъ Казанскомъ Университетѣ. Т. XXIX, вып. 4). Казань, 1896. Ц. 40 к.

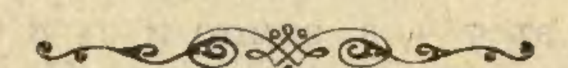
50. **Къ ученію о слюноотдѣленіи.** Проф. *Н. Миславскаго* и проф. *А. Смирнова.* (Съ таблицею рисунковъ). (Труды Общ. Естествоиспыт. при Императорскомъ Казанскомъ Университетѣ. Т. XXIX, вып. 3). Казань, 1895. Ц. 55 к.

51. **Естественно-историческое описаніе Казанской губерніи. Почвы Казанской губерніи.** *IV. Р. Ризположенскій.* (Труды Общ. Естествоисп. при Императорскомъ Казанскомъ Университетѣ. Т. XXIX, вып. 5). Казань. 1896. Ц. 80 к.

52. **О паразитизмѣ ротаторіи Notommata Werneckі въ водоросли Vaucheria.** Съ 1 таблицей рисунковъ *В. Ротертъ.* (Труды Общ. Естеств. при Императорскомъ Казанскомъ Университетѣ. Т. XXX, вып. 3). Казань, 1896. Ц. 30 к.

53. **Правила и каталогъ народныхъ чтеній.** Спб. 1896.

**Поправка.** Въ задачѣ № 346 (3 сер.), напечатанной въ № 237 „Вѣстника" на стр. 246, вмѣсто словъ: „при дѣленіи на 4 и на 9" должно быть: „при дѣленіи на 4 и на 5".



Редакторъ-Издатель Э. К. Шпачинскій.

Дозволено цензурою. Одесса, 7-го Октября 1896 г.
„Центральная типо-литографія", уг. Авчинникова пер. и Почтовой ул., д. № 39.